

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

7-й семестр, 2026/2027 навчальний рік
освітньо-професійні програми «Фізика», «Інформаційні технології (ІТ) в фізиці», «Астрономія»

Загальні вимоги до виконання

Перелік містить 30 комплексних варіантів, по п'ять за кожним із шести розділів робочої програми; номер варіанта збігається з номером завдання. Конкретний варіант і числові параметри задає викладач.

У розв'язанні потрібно обґрунтувати вибір методу, записати вихідні рівняння та граничні умови, виконати основні аналітичні перетворення, перевірити нормування, розмірності та граничні випадки, де це доречно, подати графік або числову ілюстрацію і пояснити фізичний зміст результату. Програмний код, якщо він використовується, додається до роботи разом із коротким описом алгоритму. Використання технологій штучного інтелекту декларується відповідно до робочої програми дисципліни.

Робота захищається у формі співбесіди з викладачем і оцінюється до 10 балів: правильність і повнота розв'язання (5 балів), фізична інтерпретація та перевірка результату (2 бали), оформлення й ілюстрації (1 бал), захист (2 бали).

Розділ 1. Основи та мова квантової механіки

1. Гаусівський пакет у момент $t = 0$ має вигляд $\psi(x, 0) = A \exp[-x^2/(4\sigma^2) + ik_0x]$. Знайти A , середні значення $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ та невизначеності. Побудувати $|\psi(x, t)|^2$ для вільної частинки у три моменти часу і перевірити теорему Еренфеста.

2. Для стану $\psi(x) = A(1 + \alpha x)e^{-\beta x^2}$, де $\beta > 0$, визначити умови на параметри, нормувати стан, знайти $\langle x \rangle$ і $\langle p \rangle$. Пояснити, як парність складових визначає ненульові матричні елементи.

3. Нехай оператор спостережуваної у заданому базисі має матрицю $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}$. Знайти його спектральний розклад, імовірності результатів вимірювання для довільного нормованого стану та стан після селективного вимірювання. Перевірити результат числовим прикладом.

4. Для гамільтоніана дворівневої системи $H = \frac{\hbar}{2}(\Omega_x \sigma_x + \Omega_z \sigma_z)$ знайти оператор еволюції. Побудувати траєкторію вектора Блоха для двох різних поча-

ткових станів і визначити максимальну імовірність переходу між базисними станами.

5. Розглянути двокубітний чистий стан $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$. Для заданих викладачем коефіцієнтів нормувати стан, знайти редуковані матриці густини, чистоту та ентропію запутаності. Порівняти з найближчим добутковим станом за розкладом Шмідта.

Розділ 2. Одновимірна квантова механіка

6. Частинка перебуває у скінченній симетричній прямокутній ямі. Вивести трансцендентні рівняння для парних і непарних станів, визначити кількість зв'язаних рівнів для заданої глибини та порівняти числові енергії з нескінченною ямою.

7. Для потенціалу $V(x) = -g\delta(x) + \lambda\delta(x - a)$ знайти умови існування зв'язаного стану та рівняння для його енергії. Дослідити границі $a \rightarrow 0$ і $a \rightarrow \infty$ та побудувати хвильову функцію для одного набору параметрів.

8. Побудувати передавальну матрицю прямокутного бар'єра й отримати коефіцієнт проходження для $E < V_0$ і $E > V_0$. Знайти резонансні енергії, перевірити збереження потоку та побудувати графік $T(E)$.

9. Розв'язати задачу про гармонічний осцилятор операторним методом. Для стану $|\psi\rangle = N(|0\rangle + \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)$ знайти часову еволюцію, $\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$ і добуток невизначеностей.

10. Для симетричного подвійного мінімуму, апроксимованого двома однаковими ямами, побудувати опис у двостановому наближенні. Оцінити тунельне розщеплення WKВ-методом, порівняти симетричний і антисиметричний стани та дослідити часову локалізацію частинки.

Розділ 3. Тривимірні системи і наближені методи

11. Використовуючи сходячкові оператори моменту імпульсу, побудувати всі стани для заданого l , перевірити нормування коефіцієнтів переходу і обчислити матричні елементи L_x та L_y . Подати матричне представлення операторів.

12. Для воднеподібного атома з зарядом ядра Z знайти найбільш імовірні радіуси для заданих станів, побудувати радіальні розподіли та обчислити $\langle r \rangle$. Пояснити виродження рівнів і його зв'язок із симетрією кулонівської задачі.

13. Застосувати WKВ-правило квантування до потенціалу $V(x) = \lambda|x|^s$ для

заданого $s > 0$. Отримати асимптотичну залежність E_n від n і порівняти її з точним результатом для $s = 2$.

14. Для ангармонічного осцилятора $H = H_0 + \lambda x^4$ обчислити поправки першого порядку до трьох нижніх рівнів. Оцінити область застосовності теорії збурень і порівняти з числовою діагоналізацією гамільтоніана у скінченному фоківському базисі.

15. У виродженому підпросторі задано матрицю збурення з параметрами a, b, c . Діагоналізувати її, знайти правильні нульові наближення станів і розщеплення рівнів. Показати, як симетрія дає змогу передбачити нульові матричні елементи.

Розділ 4. Спін, обертання та атомна квантова фізика

16. Для спіну $1/2$ у магнітному полі, напрям якого раптово змінюється, знайти імовірності подальших вимірювань і часову залежність вектора Блоха. Побудувати оператор обертання та явно показати зміну знака спінора після оберту на 2π .

17. Побудувати зв'язані стани для $j_1 = 1$ і $j_2 = 1/2$ методом найвищої ваги. Знайти всі потрібні коефіцієнти Клебша-Гордана, перевірити ортогональність двох базисів та обчислити $\langle \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \rangle$.

18. Для зарядженої частинки у сталому магнітному полі в калібруванні Ландау вивести спектр і хвильові функції. Пояснити виродження рівнів, порівняти з симетричним калібруванням і перевірити калібрувальну еквівалентність.

19. Обчислити тонку структуру заданого рівня воднеподібного атома з урахуванням релятивістської поправки та спін-орбітальної взаємодії. Побудувати схему розщеплення за квантовими числами n, l, j .

20. Розглянути слабке однорідне магнітне поле. Для заданого атомного терма знайти множник Ланде, зсуви Зеємана та дозволені переходи. Порівняти зі сильнопольовою границею Пашена-Бака.

Розділ 5. Квантова динаміка, керування і декогеренція

21. Для когерентного стану $|\alpha\rangle$ знайти фоківський розподіл, еволюцію $\alpha(t)$ і квадратурні невизначеності. Побудувати відповідні залежності та порівняти зі стисненим вакуумним станом.

22. Дворівнева система зазнає гармонічного збурення. У резонансному наближенні отримати осциляції Рабі, дослідити вплив розладу частот і побудувати ймовірність переходу як функцію часу та розладу.

23. Використовуючи залежну від часу теорію збурень, вивести дипольні правила відбору для заданої пари атомних станів. Обчислити кутову частину матричного елемента і пояснити, які переходи заборонені.
24. Для гамільтоніана Ландау-Зенера $H(t) = \frac{1}{2}vt\sigma_z + \frac{1}{2}\Delta\sigma_x$ перевірити адіабатичний критерій, обчислити ймовірність переходу та порівняти повільний і швидкий режими.
25. Розв'язати рівняння Ліндблада для дворівневої системи з релаксацією та чистим дефазуванням. Знайти T_1 , T_2 , стаціонарний стан і траєкторію вектора Блоха; перевірити повну додатність еволюції на числовому прикладі.

Розділ 6. Багаточастинкова механіка і розширення формалізму

26. Побудувати симетричні й антисиметричні двочастинкові стани для двох одночастинкових орбіталей. Обчислити одночастинкову густину та пояснити обмінну кореляцію для бозонів і ферміонів.
27. Застосувати варіаційний метод до основного стану атома гелію з ефективним зарядом Z_{eff} . Знайти оптимальний параметр, оцінити енергію та порівняти результат із моделлю незалежних електронів.
28. Для центрального короткодійного потенціалу у першому борнівському наближенні знайти амплітуду і диференціальний переріз розсіяння. Порівняти з низькоенергетичною s -хвильовою границею та оцінити умову застосовності.
29. Побудувати пропагатор вільної частинки шляхом дискретизації інтеграла за траєкторіями. Перевірити композиційну властивість, отримати класичну дію зі стаціонарної фази та порівняти з операторним результатом.
30. Для вільної частинки знайти плоскохвильові розв'язки рівняння Дірака, визначити спектр і струм імовірності. Виконати нерелятивістський перехід до рівняння Паулі та пояснити появу спінового магнітного моменту.